

# 益阳市 2023~2024 学年度初中学科素养与创新知识大赛

## 数 学

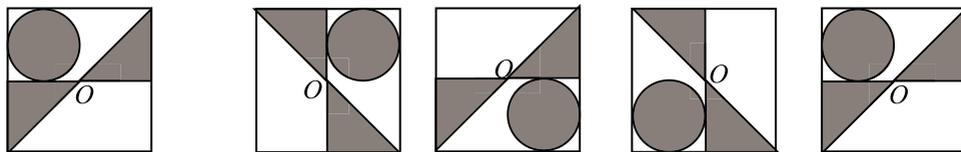
### 注意事项：

1. 本试卷包括试题卷和答题卡两部分；试题卷包括选择题、填空题和解答题三部分，共 6 页，时量 120 分钟，满分 120 分。
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、考号等填写在本试题卷和答题卡指定位置。请按答题卡的要求在答题卡上作答，在本试题卷和草稿纸上作答无效。
3. 考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回。

### 试 题 卷

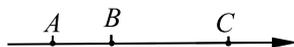
一、选择题：本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知一组数据  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  的平均数是  $a$ ，中位数为  $b$ ，众数为  $c$ ，方差为  $d$ 。将这组数据的每个数据都加上 10 得到一组新数据  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ ，则下列结论错误的是
  - A. 新数据的平均数是  $a+10$
  - B. 新数据的中位数是  $b+10$
  - C. 新数据的众数是  $c+10$
  - D. 新数据的方差是  $d+10$
2. 如下图，将图形  $a$  以点  $O$  为旋转中心，每次按顺时针方向旋转  $90^\circ$ ，依次得到其他图形，则第 2024 次旋转后得到的图形是



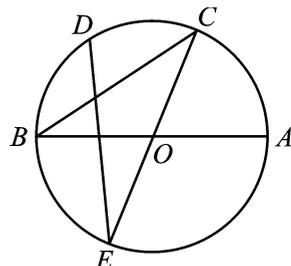
- A. ①
- B. ②
- C. ③
- D. ④

3. 实数  $a, b, c$  在数轴上的对应点  $A, B, C$  的位置如下图所示， $AB=3, AC=9$ ，且  $a+b+c=0$ ，则  $c$  的值为

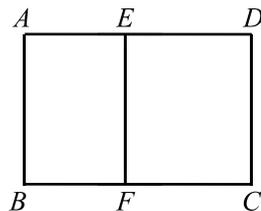


- A. 3
  - B. 4
  - C. 5
  - D. 6
4. 如右图， $AB, CE$  是  $\odot O$  的两条直径， $D$  是劣弧  $BC$  的中点，连接  $BC, DE$ 。若  $\angle ABC=34^\circ$ ，则  $\angle CED$  的度数为

- A.  $26^\circ$
- B.  $28^\circ$
- C.  $34^\circ$
- D.  $56^\circ$

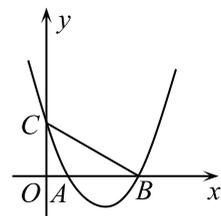


5. 如下图，在矩形  $ABCD$  中， $AB=4$ ， $BC=6$ ，点  $E$ ， $F$  分别在  $AD$ ， $BC$  上，且  $EF \parallel AB$ ，矩形  $ABCD$  与矩形  $BFEA$  相似，则矩形  $BFEA$  的面积为



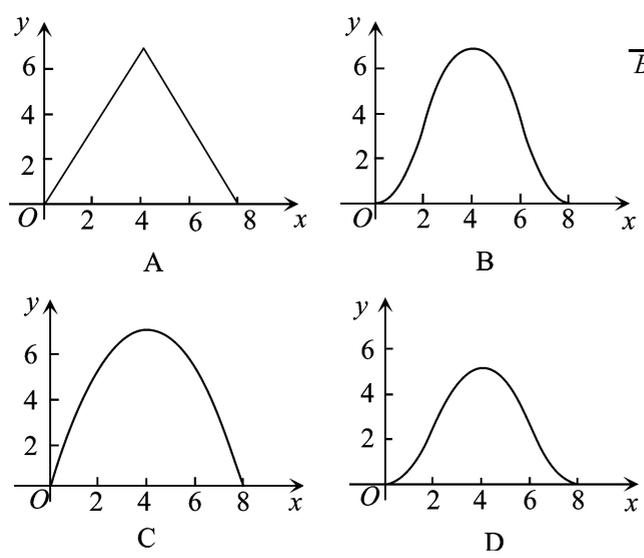
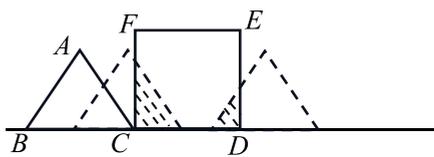
- A. 16  
 B.  $\frac{40}{3}$   
 C.  $\frac{32}{3}$   
 D.  $\frac{16}{3}$
6. 下列运算正确的是
- A.  $\frac{2}{\sqrt{6}+2} = \sqrt{6}+2$   
 B.  $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})^2 = 1-\sqrt{3}$   
 C.  $\sqrt{1+(2+\sqrt{3})^2} = \sqrt{2}+\sqrt{6}$   
 D.  $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{18}} = 2\sqrt{2}$

7. 如下图，抛物线  $y=x^2+ax+b$  交  $x$  轴于  $A$ 、 $B$  两点，交  $y$  轴于  $C$  点， $\angle OBC=30^\circ$ ，则下列各式成立的是



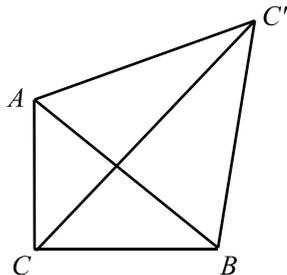
- A.  $3a+\sqrt{3}b-1=0$   
 B.  $3b+\sqrt{3}a-1=0$   
 C.  $3a+\sqrt{3}b+1=0$   
 D.  $3b+\sqrt{3}a+1=0$
8. 实数  $a, b, c, d$  满足  $a+b>0$ ， $bc<0$ ， $\frac{c}{a}>1$ ， $\frac{d}{c}>1$ ， $\frac{1}{a}<\frac{1}{d}$ ，则下列结论正确的是
- A.  $d<c<a<b$     B.  $b<a<c<d$     C.  $c<b<d<a$     D.  $a<c<d<b$

9. 如下图，边长为 4 的正三角形  $ABC$  沿直线  $BC$  向右平移，穿过边长为 4 的正方形  $CDEF$  ( $B, C, D$  三点共线)，则两个图形重叠部分的面积  $y$  与正三角形  $ABC$  平移的距离  $x$  ( $0 \leq x \leq 8$ ) 的函数关系用图象表示大致是



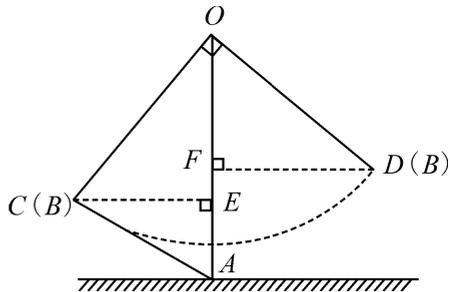
10. 如下图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=3\sqrt{3}$ ， $BC=6$ ，以  $AB$  为边作等边三角形  $ABC'$  ( $C'$ 与  $C$ 位于  $AB$ 的异侧)，则  $CC'=\underline{\hspace{2cm}}$

- A.  $6\sqrt{3}$                       B.  $3\sqrt{13}$   
C.  $2\sqrt{31}$                       D. 12

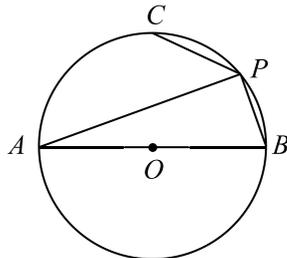


二、填空题：本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。请将答案填在答题卡中对应题号的横线上。

11. 若实数  $4-\sqrt{2}$  的小数部分为  $a$ ，则  $a^2-4a=\underline{\hspace{2cm}}$ 。
12. 将一个棱长为 3 的正方体的六个面都涂上红色，再把它全部切割成棱长为 1 的小正方体，从中任取一个小正方体，则取得的小正方体至少有 2 个面涂上了红色的概率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
13. 如下图，地面上有一根旗杆  $AO$ ，小明两次拉住从顶端垂下的绳子  $OB$  到  $OC$ ， $OD$  的位置 ( $OC$ ， $OA$ ， $OD$  在同一平面内)，测得  $\angle COD=90^\circ$ ，且  $C$ 、 $D$  两点到  $OA$  的水平距离  $CE$ 、 $DF$  分别为 1.4m 和 1.8m，则  $F$ 、 $E$  两点的高度差即  $FE$  的长为  $\underline{\hspace{2cm}}$  m。



14. 阅读：因为  $(x+2)(x-1)=x^2+x-2$ ，所以  $(x^2+x-2)\div(x-1)=x+2$ ，这说明多项式  $x^2+x-2$  有一个因式为  $x-1$ ，也说明当  $x=1$  时，多项式  $x^2+x-2$  的值为 0。解答问题：方程  $x^3-4x^2-7x+10=0$  的解是  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
15. 如下图， $AB$  是圆  $O$  的直径， $C$  为  $\widehat{AB}$  的中点， $P$  为  $\widehat{CB}$  上一点，若  $CP=\sqrt{6}$ ， $PB=2$ ，则  $AP=\underline{\hspace{2cm}}$ 。



三、解答题：本题共 5 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (本小题满分 12 分)

(1) 化简:  $\left(\frac{a^2+ab}{a^2-ab} - \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}\right) \div \frac{a}{a-b} + \frac{4}{1+\frac{b}{a}}$ .

(2) 现有盐水若干千克, 第一次加入一定量的水后, 盐水的浓度变为 4%; 第二次又加入同样多的水后, 盐水浓度变为 3%. 则第三次再加入同样多的水之后盐水的浓度是多少?

17. (本小题满分 14 分)

已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ). 函数值  $y$  和自变量  $x$  的部分对应取值如下表所示:

$x$	...	-1	0	1	2	3	...
$y$	...	$m$	2	$n$	2	$p$	...

- (1) 若  $m = 3$ , 求二次函数的表达式;  
(2) 当  $0 \leq x \leq 3$  时,  $y$  有最大值 7, 求  $n$  的值;  
(3) 若  $|m| + |p| = |n|$ , 求  $a$  的值.

18. (本小题满分 14 分)

(1) 已知正整数  $n_1, n_2, \dots, n_{100}$  满足  $n_1 < n_2 < \dots < n_{100}$ , 正整数  $m = \frac{1}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \dots + \frac{100}{n_{100}}$ .

- ①直接写出  $m$  的最大值;  
②请你列举出  $m$  除最大值外的 1 个值及取得这个值对应的 1 组  $n_1, n_2, \dots, n_{100}$  的值;  
③直接写出所有符合条件的  $m$  的值之和.

(2) 若 85, 227, 440 分别被自然数  $x$  除时, 所得余数都是  $y$ , 记  $w = x - y$ , 求  $w$  的值.

19. (本小题满分 14 分)

如图 *a*, 在平面直角坐标系中, 若点  $P$  不在直线  $l$  上且直线  $l$  与坐标轴不平行, 过点  $P$  作  $PE \parallel x$  轴与  $l$  交于点  $E$ ,  $PF \parallel y$  轴与  $l$  交于点  $F$ , 则称折线  $EPF$  为点  $P$  关于直线  $l$  的“ $L$  路径”, “ $L$  路径”的长度称为点  $P$  关于直线  $l$  的“ $L$  距离”, 记为  $L_{P-l}$ , 即  $L_{P-l} = PE + PF$ .

(1) 若直线  $l_1$  的表达式为  $y = \frac{1}{2}x - 1$ , 求  $L_{O-l_1}$  的值 ( $O$  为坐标原点);

(2) 如图 *b*, 已知抛物线  $W: y = ax^2 - \frac{5}{2}x + 2$  ( $a > 0$ ) 与  $x$  轴交于两点  $A, B$  ( $A$  在  $B$  的左侧), 与  $y$  轴交于  $C$  点, 且  $\angle OBC = \angle OCA$ , 直线  $AC$  记为  $l_{AC}$ , 直线  $BC$  记为  $l_{BC}$ .

① 抛物线  $W$  上有一点  $P$  满足  $L_{P-l_{AC}} = L_{P-l_{BC}}$ , 求点  $P$  的坐标;

② 直线  $l_{BC}$  下方的抛物线  $W$  上有一动点  $Q$ ,  $Q$  点关于直线  $l_{BC}$  的“ $L$  路径”与以  $AB$  的中点  $D$  为圆心,  $\frac{1}{2}$  为半径的圆有交点, 求  $L_{Q-l_{BC}}$  的取值范围.

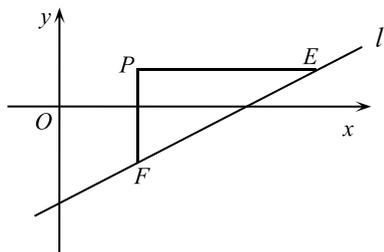


图 *a*

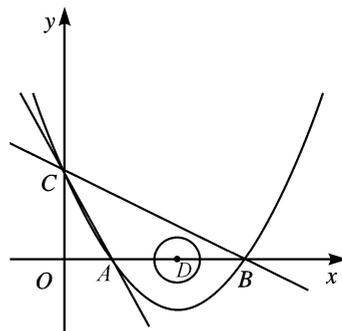
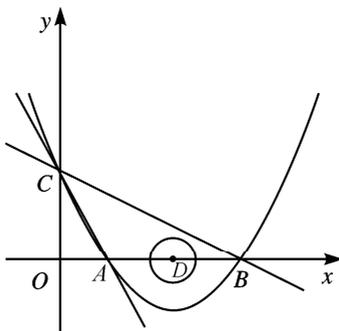


图 *b*



备用图

20. (本小题满分 16 分)

【阅读学习】我们知道三角形的三条中线交于一点，这个点称为三角形的重心。人们在对三角形重心的研究中发现并证明了如下系列结论：如图  $a$ ，①已知  $\triangle ABC$  的重心为  $G$ ， $M$  为  $BC$  的中点，则  $AG=2GM$ ；②在  $\triangle ABC$  中， $M$  为  $BC$  的中点， $G$  在  $AM$  上， $AG=2GM$ ，连接  $CG$  并延长交  $AB$  于点  $N$ ，则  $N$  为  $AB$  的中点；③已知  $\triangle ABC$  的重心为  $G$ ， $M$  为  $BC$  的中点，过  $G$  的直线分别交  $AB, AC$  于点  $E, F$ ，则  $S_{\triangle AEF} = 2S_{\triangle MEF}$ ；...

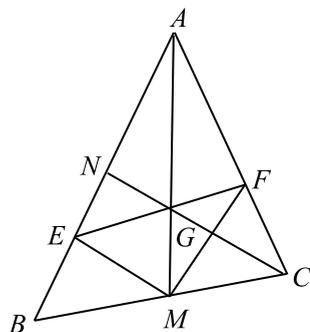


图  $a$

(在解答本题(2)(3)问时，阅读学习中的 3 个结论根据你的需要可以直接运用)

【验证感知】(1) 请从以上 3 个结论中选一个进行证明(若选择多个结论进行证明，则以第一个证明进行评分)；

【初步运用】(2) 如图  $b$ ，在  $\text{Rt}\triangle A_1B_1C_1$  中， $\angle A_1B_1C_1=90^\circ$ ， $\sin \angle B_1A_1C_1=\frac{1}{3}$ ，以  $C_1$  为圆心， $C_1B_1$  的长为半径作圆交  $A_1C_1$  于  $D$  点，交  $A_1C_1$  的延长线于  $H$  点，连接  $B_1D, T, K$  分别为  $A_1B_1, A_1C_1$  延长线上的点，且  $\angle A_1B_1D=\angle TB_1K$ ，求证： $A_1D=HK$ ；

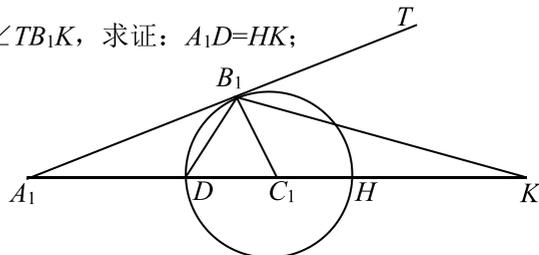


图  $b$

【灵活运用】(3) 如图  $c$ ，在 (2) 的条件下，设  $B_1K$  的中点为  $R$ ，连接  $A_1R$  交  $B_1C_1$  于点  $O$ ， $P$  为  $A_1B_1$  上一点，连接  $PO$  并延长交  $A_1K$  于  $Q$  点，记  $w=\frac{A_1B_1}{A_1P} + \frac{A_1K}{A_1Q}$ ，则  $w$  是否为定值，

若是，求出这个定值；若不是，说明理由。

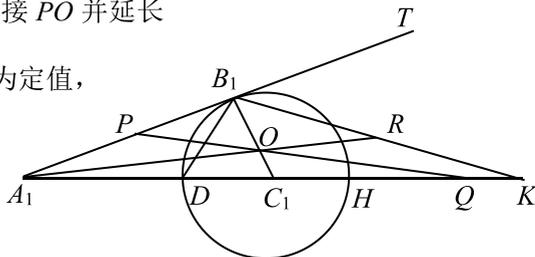


图  $c$