益阳市一中2023年下学期高二年级第一次月考

数 学 答 案

1．B

2．C

3．C

4．B

5．B

6．B

7．D

【详解】由图可知，猪肉、鸡蛋、鲜果、禽肉、粮食、食用油这6种食品中，粮食价格同比涨幅最小，所以A错误.

$34.4\% < 5\times 8.5\%$，所以B错误.

去年11月鲜菜价格要比今年11月高，所以C错误.

因为

$\frac{1}{7}\times\left(-21.2\%+7.6\%+3\%+8.5\%+9.6\%+10.4\%+34.4\%\right)>$

$\frac{1}{7}\times\left(-22\%+7\%+3\%+8\%+9\%+10\%+34\%\right)=\frac{1}{7}\times 49\%=7\%$，所以D正确.

故选：D

8．A

【详解】由题意得$\triangle AOB$是等边三角形，则直线l的倾斜角为30°，其斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，故直线l的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+a$，代入椭圆方程整理得$\left(b^2+\frac{1}{3}a^2\right)x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3x+a^2c^2=0$，其判别式$\Delta=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3\right)^2-4\left(b^2+\frac{1}{3}a^2\right)\cdot a^2c^2=0$，化简可得$3c^4-4a^2c^2+a^4=0$，则$3e^4-4e^2+1=0$，又$0<e<1$，所以$e=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故选：A.

9．ACD

10．BC

【详解】易知直线l必过点$(-1,0)$，故A错误；

点$(-1,0)$在圆E内，所以直线l与圆E必相交，故B正确；

圆心$E(0,0)$到直线l的距离$d=\frac{|1|}{\sqrt{1+4m^2}}$，当$m=0$时距离取最大值1，故C正确；

当$m=\frac{1}{2}$时，直线$l:x+y+1=0$，则直线l被圆E截得的弦长为$2\sqrt{3-\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2}=\sqrt{10}$，故D错误.

故选：BC

11．BC

【详解】由题意可得$P\left(M\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，故B正确；

当两次抛掷的点数为$\left(1,4\right)$时，事件M与事件N同时发生，所以事件M与事件N不互斥，故A错误；

事件M与事件N同时发生的情况有$\left(1,2\right),\left(1,4\right),\left(2,1\right),\left(2,3\right)$共4种，所以$P\left(MN\right)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，

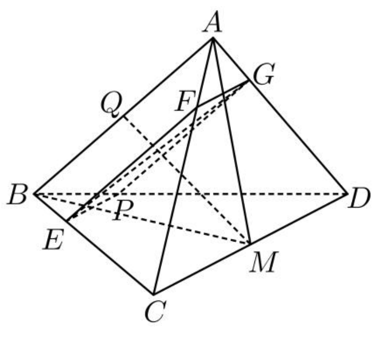
又$P\left(N\right)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，所以$P\left(MN\right)=P\left(M\right)\cdot P\left(N\right)$，故事件$M$与事件$N$相互独立，故C正确；

$P\left(M+N\right)=P\left(M\right)+P\left(N\right)-P\left(MN\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，故D错误.

故选：BC.

12．ACD

【详解】对于A，取AB的中点Q，CD的中点M，连接AM,BM,QM，



由于$AC=AD=BC=BD=2$，故$CD\perp AM,CD\perp BM$，

而$AM\cap BM=M,AM,BM\subset$平面ABM，故$CD\perp$平面ABM，

又$CD\subset$平面ACD，故平面$ACD\perp$平面ABM，

则$\angle BAM$即为直线AB与平面ACD所成的角，

又$AQ=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2},AM=\sqrt{2^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，而$BM=\sqrt{2^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$,

故$AM=BM$，则$MQ\perp AB$，故$\cos\angle BAM=\frac{AQ}{AM}=\frac{\sqrt{15}}{15}$，A 正确；

对于 B，设平面EFG与棱BD的交点为P，

因为$AB//$平面EFG，且$AB\subset$平面ABC，平面$ABC\cap$平面$EFG=EF$，

故$AB // EF$，且由题意知$AB\neq EF$，否则AB,EF重合，不合题意，

故四边形$ABEF$为梯形，

同理四边形$FCDG$为梯形，所以$\frac{EF}{AB}=\frac{CF}{AC},\frac{FG}{CD}=\frac{AF}{AC}$，

由于$AB=CD=1$，故$\frac{CF}{AC}+\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{AB}+\frac{FG}{CD}=1,\therefore EF+FG=1$，

又因为$AB // EF$，同理可证$AB // GP$，则$EF//GP$；同理证明$FG // EP$，

则四边形$EFGP$为平行四边形，故四边形$EFGP$的周长为 2，

即四面体$ABCD$被平面EFG所截得的截面周长为定值 2，B 错误；

对于 C，因为$CD\perp$平面ABM，$AB\subset$平面ABM，故$CD\perp AB$；

而$AB // EF$，同理可证$FG // CD$，故$EF\perp FG$，

结合$EF+FG=1$，故$S_{\triangle EFG}=\frac{1}{2}EF\cdot FG\le\frac{1}{2}\left(\frac{EF+FG}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$,

当且仅当$EF=FG=\frac{1}{2}$时等号成立，即$\triangle EFG$的面积的最大值为$\frac{1}{8}$，C 正确；

对于 D，由以上分析知$AM=BM=\frac{\sqrt{15}}{2},AB=1$，

故$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{(\frac{\sqrt{15}}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$，而$CD\perp$平面$ABM$，$CD=1$，

故$V_{A-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABM}\cdot CD=\frac{\sqrt{14}}{12}$，而$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}=S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

设四面体$ABCD$的内切球的半径为r，则$V_{A-BCD}=\frac{1}{3}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}+S_{\triangle BCD})\cdot r$，

即$\frac{\sqrt{14}}{12}=\frac{1}{3}\times\sqrt{15}\times r,\therefore r=\frac{\sqrt{210}}{60}$,

故四面体$ABCD$的内切球的表面积为$4\pi\times(\frac{\sqrt{210}}{60})^2=\frac{7\pi}{30}$，D 正确，

故选：ACD

13．16

14．12

【详解】圆 $O_1: x^2+y^2-6x=0$ 化为标准方程为 $(x-3)^2+y^2=9$，圆心 $O_1(3,0)$，半径 $r_1=3$，

圆 $O_2: x^2+y^2+8y+m=0$ 化为标准方程为 $O_2: x^2+(y+4)^2=16-m$，圆心 $O_2(0,-4)$，半径

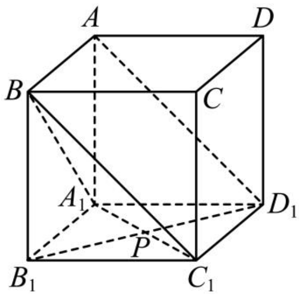
$r_2=\sqrt{16-m}$，

由两圆外切，有 $|O_1O_2|=r_1+r_2$，即 $\sqrt{3^2+(-4)^2}=3+\sqrt{16-m}$，解得 $m=12$.

故答案为：12

15．$30°$

【详解】如图，连接 C_1P，



因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，$BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$C_1P\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 $C_1P\perp BB_1$，

正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 B_1D_1 的中点，所以 $C_1P\perp B_1D_1$，

$BB_1, B_1D_1\subset$ 平面 B_1BP，$BB_1\cap B_1D_1=B_1$，所以 $C_1P\perp$ 平面 B_1BP.

又 $BP\subset$ 平面 B_1BP，所以 $C_1P\perp BP$.

连接 BC_1，由 $AB//C_1D_1$ 且 $AB=C_1D_1$，四边形则 ABC_1D_1 为平行四边形，

则有 $AD_1//BC_1$，所以 $\angle PBC_1$ 为直线 PB 与 AD_1 所成的角.

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1PB$ 中，$C_1P=\frac{1}{2}B_1D_1=\sqrt{2}$，$BC_1=2\sqrt{2}$，

$\sin\angle PBC_1=\frac{PC_1}{BC_1}=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\angle PBC_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：$.30°$

16．$\sqrt{3}$

【详解】设 $\angle CAD=\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\frac{\frac{1}{2}AC}{AD}=\cos\alpha$，代入数据得 $AC=2\cos\alpha$，

$\because AC=\sqrt{3}AB$，$\therefore AB=\dfrac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos\alpha$，

在$\triangle ABD$中运用余弦定理得$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$，

即$BD^2=\dfrac{4\cos^2\alpha}{3}+1^2+2\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos\alpha\times1\times\sin\alpha$

$=\dfrac{4\cos^2\alpha}{3}+1^2+2\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos\alpha\times1\times\sin\alpha$

$=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin2\alpha+1$

$=\dfrac{2}{3}\cos2\alpha+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin2\alpha+\dfrac{5}{3}=\dfrac{4}{3}\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{5}{3}$

$\because\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right)$，

所以当$2\alpha+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$时，$BD^2$的最大值为3，则$BD$的最大值为$\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

17.（1）由题意可得：$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1$，$a^2=b^2+c^2$，

解得$a=2\sqrt{2}$，$b=c=2$．……………………………………………………4分

$\therefore$椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$．……………………………………………5分

（2）左焦点$F_1(-2,0)$，右焦点$F_2(2,0)$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

直线l的方程为：$y=x+2$，……………………………………………………6分

联立$\begin{cases}y=x+2\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，化为：$3x^2+8x=0$，解得$x=0$，$-\dfrac{8}{3}$，……………………7分

$\therefore x_1=0$，$y_1=2$；$x_2=-\dfrac{8}{3}$，$y_2=-\dfrac{2}{3}$．………………………………………8分

$\therefore\triangle ABF_2$的面积

$S=\dfrac{1}{2}\times2c\times|y_1-y_2|=2\times\left|2-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right|=\dfrac{16}{3}$．……………………………………10分

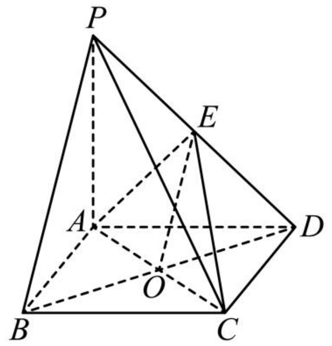
18.（1）连接BD，设$AC\cap BD=O$，连接OE，…………………………………2分

因为 $PB//$ 平面 AEC， $PB\subset$ 平面 PBD，平面 $PBD\bigcap$ 平面 $AEC=EO$，

所以 $PB//EO$ ……………………………………………………………………4 分

又底面 $ABCD$ 为矩形，所以 O 为 BD 的中点，

所以 E 为 PD 的中点.……………………………………………………………………6 分



（2）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$，

又 $CD\perp AD$， $AD\cap PA=A$， $AD,PA\subset$ 平面 PAD，所以 $CD\perp$ 平面 PAD，

所以 $\angle CED$ 为直线 CE 与平面 PAD 所成的角，即 $\angle CED=45^{\circ}$，……………………………8 分

又 $AP=AD=1$，所以 $PD=\sqrt{AP^2+AD^2}=\sqrt{2}$，则 $DE=\dfrac{1}{2}PD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

由 $CD\perp$ 平面 PAD， $PD\subset$ 平面 PAD，所以 $CD\perp PD$，

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中 $CD=DE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ……………………………………………………………10 分

所以 $V_{E-ACD}=\dfrac{1}{2}V_{P-ACD}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}S_{\triangle ACD}\times PA=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times1=\dfrac{\sqrt{2}}{24}$.……………………12 分

19.（1）由题意可知，逻辑思维能力优秀的学生共有 $(2+a)$ 人，

设事件 A：从 20 位学生中随机抽取一位，逻辑思维能力优秀的学生，

则 $P(A)=\dfrac{2+a}{20}=\dfrac{1}{5}$，

解得 $a=2$，所以 $b=4$．……………………………………………………4 分

（2）由题意可知，运动协调能力为优秀的学生共有 6 位，分别记为 M_1， M_2， M_3， M_4，

M_5， M_6．其中 M_5 和 M_6 为运动协调能力和逻辑思维能力都优秀的学生．从中任意抽取 2

位，可表示为M_1M_2，M_1M_3，M_1M_4，M_1M_5，M_1M_6，M_2M_3，M_2M_4，M_2M_5，M_2M_6，

M_3M_4，M_3M_5，M_3M_6，M_4M_5，M_4M_6，M_5M_6，共 15 种可能．…………………7 分

设事件B：从运动协调能力为优秀的学生中任意抽取 2 位，其中至少有一位逻辑思维能力优秀的学生，

事件B包括M_1M_5，M_1M_6，M_2M_5，M_2M_6，M_3M_5，M_3M_6，M_4M_5，M_4M_6，M_5M_6，

共 9 种可能．……………………………………………………………………10 分

所以$P(B)=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$．

所以至少有一位逻辑思维能力优秀的学生的概率为$\dfrac{3}{5}$．………………………………12 分

20．（1）依题意，

$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}$，………………………………………3 分

由$f(A)=\dfrac{3}{2}$，得$\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})=1$，而$0<A<\pi$，即$-\dfrac{\pi}{6}<2A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{11\pi}{6}$，因此$2A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，

所以$A=\dfrac{\pi}{3}$.………………………………………………………6 分

（2）在$\triangle ABC$中，由$\sin C=2\sin B$及正弦定理，得$c=2b$，……………………………7 分

由（1）及AD平分$\angle BAC$，得$\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$，

又$AD=2$，由$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$，得$\dfrac{1}{2}c\cdot AD\sin\angle BAD+\dfrac{1}{2}b\cdot AD\sin\angle CAD=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle BAC$，

……………………………………………………………………………………9 分

即$4b\sin\dfrac{\pi}{6}+2b\sin\dfrac{\pi}{6}=2b^2\sin\dfrac{\pi}{3}$，解得$b=\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{3}$，……………………………11 分

所以$\triangle ABC$的面积

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.……………………………………………………12 分

21．（1）证明：过点A作$AN\perp BC$，垂足为N，

在等腰梯形$ABCD$中，因为$AD/\!/BC, BC=2AB=2AD=2$，所以$BN=\dfrac{1}{2},\angle ABC=60^\circ$．

在$\triangle ABC$中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC=3$，则$AB^2+AC^2=BC^2$，则$AC\perp AB$．

…………………………………………………………………………2 分

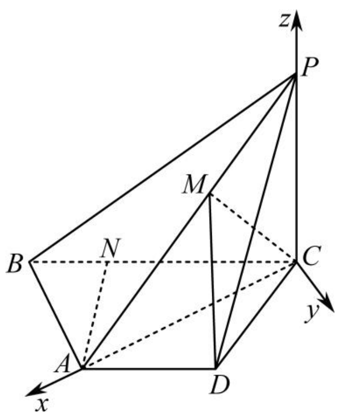
因为$PC\perp$底面$ABCD$，$AB\subset$底面$ABCD$，所以$PC\perp AB$．…………………………3 分

因为$AC\bigcap PC=C$，所以$AB\perp$平面PAC．………………………………………………5 分

又$CM\subset$平面PAC，以$AB\perp CM$．　　　　………………………………………………6 分

（2）解：以C为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，令$\dfrac{PM}{PA}=\lambda$，$0\le\lambda<1$，则

$C(0,0,0),A(\sqrt{3},0,0),D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0\right),M(\sqrt{3}\lambda,0,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，……………………………………7 分



则$\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0\right),\overrightarrow{CM}=(\sqrt{3}\lambda,0,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$．

设平面CDM的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}x}{2}+\dfrac{y}{2}=0,\\ \sqrt{3}\lambda x+\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda\right)z=0,\end{cases}$令$x=1$，得

$\vec{m}=\left(1,-\sqrt{3},-\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\right)$．　　　　………………………………………………9 分

由图可知，$\vec{n}=(0,0,1)$是平面ADC的一个法向量．……………………………………10 分

因为二面角$A-DC-M$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{17}}{17}$，所以$|\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}}{\sqrt{4+\dfrac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}}}=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$，

解得$\lambda=\dfrac{1}{3}$．……………………………………………………………………………11 分

故当二面角$A-DC-M$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{17}}{17}$时，$\dfrac{PM}{PA}=\dfrac{1}{3}$．…………………………………12 分

22.（I）解：设F_1是椭圆的左焦点，连接OP，PF_1，PF.

$\because |OP|=\sqrt{2}=|OF|=|OF_1|$，$\therefore PF_1\perp PF$.

$\therefore |PF_1|=\sqrt{|F_1F|^2-|PF|^2}=2$.

$\therefore |PF_1|+|PF|=4=2a$.$\therefore a=2$.

又$\because a^2=b^2+c^2$，$c=\sqrt{2}$，$\therefore b=\sqrt{2}$.

$\therefore$椭圆C的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.……………………………………………………4 分

（II）证明：① 当直线l斜率为 0 时，l的方程为$y=0$，………………………………5 分

②当直线l斜率不为 0 时，由题意，设l的方程为$x=ty+\sqrt{2}$.

$\because A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，点M为点B关于x轴的对称点，则$M(x_2,-y_2)$.

$\begin{cases}x=ty+\sqrt{2},\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$整理，得$(t^2+2)y^2+2\sqrt{2}ty-2=0$.………………………………7 分

$\Delta=(2\sqrt{2}t)^2+8(t^2+2)=16t^2+16>0$，

$y_1+y_2=-\dfrac{2\sqrt{2}t}{t^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{2}{t^2+2}$.……………………………………………………8 分

$\because k_{AM}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}$，　　$\therefore$直线AM的方程为$y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$，…………9 分

即$y=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}x+y_1-\dfrac{x_1(y_1+y_2)}{x_1-x_2}$，

即$y=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}x+\dfrac{y_1(x_1-x_2)-x_1(y_1+y_2)}{x_1-x_2}$.

易知$x_1=ty_1+\sqrt{2}$，$x_2=ty_2+\sqrt{2}$，

$\therefore y_1(x_1-x_2)-x_1(y_1+y_2)=\ y_1t(y_1-y_2)-(ty_1+\sqrt{2})(y_1+y_2)=\ -2ty_1y_2-\sqrt{2}(y_1+y_2)=$

$\dfrac{8t}{t^2+2}=-2\sqrt{2}(y_1+y_2)$.

$\therefore y=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}x-\dfrac{2\sqrt{2}\left(y_1+y_2\right)}{x_1-x_2}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}\left(x-2\sqrt{2}\right)$.

∴过A，M的直线过定点$\left(2\sqrt{2},0\right)$；……………………………………………11分

综上可知，过A，M的直线过定点$\left(2\sqrt{2},0\right)$.……………………………………12分